4Н

УДК 681.511.2; 621:658.011.56

А.А. Несенчук[1], О.Ф. Опейко[2], Д.С. Однолько[2]
[1]Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси (ОИПИ НАН Беларуси), Беларусь
Беларусь, 220012, г. Минск, ул. Сурганова, 6
[2]Белорусский национальный технический университет (БНТУ), Беларусь
Беларусь, 220013, пр-т Независимости, 65

Моделирование динамики и расчет робастных параметров системы управления электропривода на основе корневых портретов

A.A. Nesenchuk[1], O.F. Opeiko[2], D.S. Odnolko[2]
[1]United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (UIIP NAS Belarus), Belarus
Belarus, 220012, Minsk, Surganov str., 6.
[2]Belarusian National Technical University (BNTU), Belarus
Belarus, 220013, Nezavisimosti ave., 65

Dynamics Simulation and Calculation of Robust Parameters for the Electric Drive Control System on the Basis of the Root Locus Portraits

А.А. Несенчук[1], О.Ф. Опейко[2], Д.С. Однолько[2]
[1]Об’єднаний інститут проблем інформатики Національної академії наук Білоруси, Білорусь
Білорусь, 220012, м. Мінськ, вул. Сурганова, 6,
[2]Білоруський національний технічний університет (БНТУ), Білорусь
Білорусь, 220013, м. Мінськ, пр. Незалежності, 65

Моделювання динаміки і розрахунок робастних параметрів системи управління електроприводана основі кореневих портретів

В статье рассматривается задача моделирования динамики управления потокосцеплением ротора в системе векторного управления асинхронного электродвигателя с использованием математической модели в форме расширенного корневого годографа. Выполнен расчет параметров системы при ее функционировании в условиях существенной параметрической неопределенности объекта. Результаты моделирования переходных процессов подтверждают малую чувствительность системы к параметрическим возмущениям.
Ключевые слова: динамическая система, корневой годограф, моделирование, робастная устойчивость.

The paper considers the task of simulation of the rotor flux control system dynamics in the rotor flux oriented vector control system of the induction motor with application of the mathematical model in the form of the extended root locus. Control system parameters calculation has been carried out in consideration of the system functioning in conditions of substantial parametric uncertainty. The results of time response simulation confirm small sensitivity of the system to parameter variations.
Key words: dynamic system, root locus, modeling, robust stability.

У статті розглядається задача моделювання динаміки управління потокозчеплення ротора в системі векторного керування асинхронного електродвигуна з використанням математичної моделі у формі розширеного кореневого годографа. Виконано розрахунок параметрів системи при її функціонуванні в умовах суттєвої параметричної невизначеності об’єкта. Результати моделювання перехідних процесів підтверджують малу чутливість системи до параметричних збурень.
Ключові слова: динамічна система, кореневої годограф, моделювання, робастності стійкість.

Введение

В области исследования и синтеза динамических систем с неопределенностью существует значительное количество известных подходов и методов. Среди современных методов синтеза, наряду с частотными [1], можно отметить метод модального управления [2], позволяющий задавать желаемое расположение корней, корневого годографа [1], [3-7], а также методы последовательной оптимизации контуров [8] и пространства состояний [1], используемые для структурного синтеза, и ряд других. Представляют большой интерес задачи об устойчивости, решаемые в современных постановках в робастном варианте [5-7], [9]. Преимущество корневого подхода к проблеме [3-7] состоит в том, что само его использование уже предполагает параметрические вариации, он идеально подходит для синтеза систем и отличается большой наглядностью, позволяя не только рассчитать требуемые значения параметров системы, но также в деталях наблюдать характер изменения динамических свойств, реакцию системы в ответ на параметрические вариации, что является важным при исследовании неопределенных систем.

В системах векторного управления электроприводом от качества управления потокосцеплением в значительной степени зависит качество управления электромагнитным моментом и скоростью, энергетическая эффективность привода. Вопросы управления потокосцеплением в условиях параметрической неопределенности актуальны, и изучаются многими исследователями [10-12].

Существенное значение имеет задача выбора вида полинома синтезируемой системы по критерию принадлежности корней заданной области на комплексной плоскости при изменениях параметров объекта.

1 Динамические характеристики канала управления потокосцеплением

На рис. 1 представлена структурная схема системы управления потокосцеплением электропривода, в которой объектом является асинхронный электродвигатель.

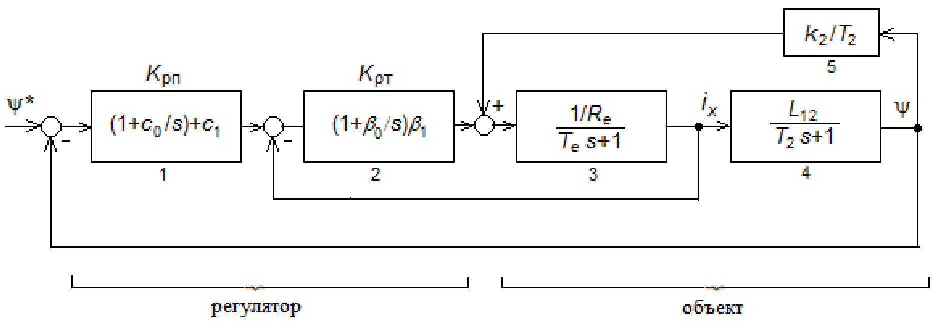


Рисунок 1 – Структурная схема системы управления электропривода

Запишем уравнение динамики системы управления:

$$(((\psi^* - \psi)K_{pn} - i_x)K_{pm} + \frac{k_2}{T_2}\psi)\frac{1/R_e}{T_e s + 1} = i_x = \frac{\psi(T_2 s + 1)}{L_{12}}, \quad (1)$$

где ψ – потокосцепление, Вб;

$K_{рп}$, $K_{рт}$ – передаточные функции регулятора потокосцепления и тока соответственно;

c_0, c_1, β_0, β_1 – коэффициенты регуляторов потокосцепления и тока (c_0 = const);

R_e – сопротивление эквивалентное, Ом;
T_e – постоянная времени эквивалентная, с;
L_{12} – взаимоиндуктивность статора и ротора, Гн (L_{12} = const);
T_2 – постоянная времени ротора, с;
k_2 = const;
i_x – сила тока, А.

Характеристический полином системы имеет следующий вид:

$$N = (s+\beta_0)\beta_1(s+c_0)c_1 + \beta_1(s+\beta_0)(T_2 s+1)s - \frac{k_2}{T_2}s^2 + (T_2 s+1)(T_e s+1)\frac{R_e}{L_{12}}s^2, \quad (2)$$

где $\beta_0 = \frac{1}{T_e}$; $\beta_1 = \frac{T_e R_e}{2T_\mu}$; $\beta_{pn} = \frac{T_2}{4T_\mu L_{12}}$; $c_0 = \frac{1}{T_2}$; $c_1 = \beta_{\text{рп}}$;

T_μ – малая постоянная времени.

Характеристический полином является полиномом четвертой степени.

Параметры регулятора: β_0, β_1, c_0, c_1; параметры объекта: R_e, L_{12}, T_e, T_2, k_2.

Преобразовав полином (2), получим выражения для определения коэффициентов характеристического полинома.

$$a_0 = T_2 T_e \frac{R_e}{L_{12}}; \quad (3)$$

$$a_1 = T_e \frac{R_e}{L_{12}} + T_2 \frac{R_e}{L_{12}} + \beta_1 T_2; \quad (4)$$

$$a_2 = \beta_1 c_1 + \beta_1 \beta_0 T_2 + \beta_1 - \frac{k_2}{T_3} + \frac{R_e}{L_{12}}; \quad (5)$$

$$a_3 = \beta_0 \beta_1 c_1 + \beta_1 c_0 c_1 + \beta_0 \beta_1;\ a_4 = \beta_0 \beta_1 c_0 c_1. \quad (6)$$

$$a_4 = \beta_0 \beta_1 c_0 c_1. \quad (7)$$

2 Моделирование динамики электропривода в условиях неопределенности на основе математической модели в форме корневого портрета

2.1 Описание динамики системы управления с учетом параметрической неопределенности

При функционировании электропривода параметры объекта, электродвигателя, под воздействием различных факторов могут изменяться в широких пределах, т.е. имеет место параметрическая неопределенность. Поэтому, систему управления электродвигателем будем рассматривать как систему с интервальной неопределенностью.

Запишем характеристический полином системы управления приводом на основании (2) в общем виде следующим образом:

$$s^4 + a_1 s^3 + a_2 s + a_3 = p(s), \quad (8)$$

где коэффициенты a_j *действительны и изменяются в следующих пределах:*

$$\underline{a}_j \le a_j \le \overline{a}_j,\ j = \overline{0,4},\ a_0 \ne 0; \quad (9)$$

$\underline{a}_j$ и $\overline{a}_j$ – соответственно минимальное и максимальное значения замкнутого интервала изменения коэффициента a_j.

Для обеспечения заданного качества работы привода требуется разместить семейство корней интервального полинома (8) в области Q, ограниченной двумя линиями β_1 и β_2 (рис. 2) равной степени устойчивости, описываемыми соответственно уравнениями

$$\sigma_{max} = -4{,}5,\ \sigma_{min} = -105. \tag{10}$$

Для решения поставленной задачи будем использовать расширение [6] полинома (8) и, соответственно, его расширенный корневой годограф [6].

Запишем расширенный полином от (8) в виде

$$E_4(p(s)) = \begin{cases} s + a_1 = 0, & (11.1) \\ s^2 + a_1 s + a_2 = 0, & (11.2) \\ s^3 + a_1 s^2 + a_2 s = 0, & (11.3) \\ s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0. & (11.4) \end{cases} . \tag{11}$$

На основании заданных границ (10) области качества Q и, используя расширенный полином (11), определим интервалы значений параметров (коэффициентов) (8), в пределах которых сохраняется робастная устойчивость и робастное качество системы.

2.2 Определение интервальных параметров, обеспечивающих робастные свойства системы управления приводом

В соответствии с разработанной методикой [6] для вычисления значений границ интервалов параметров a_2, a_3 и a_4 используем соответственно уравнения (11.2), (11.3) и (11.4) расширенного полинома (11). Чтобы применить данную методику к интервальному характеристическому полиному с целью обеспечения заданных требований качества переходного процесса, разобьем интервал (10) линиями равной степени устойчивости b_1 и b_2 (рис. 2), которые соответственно будут ограничивать области размещения корней (области качества) полинома (11.2) и полинома (11.3).

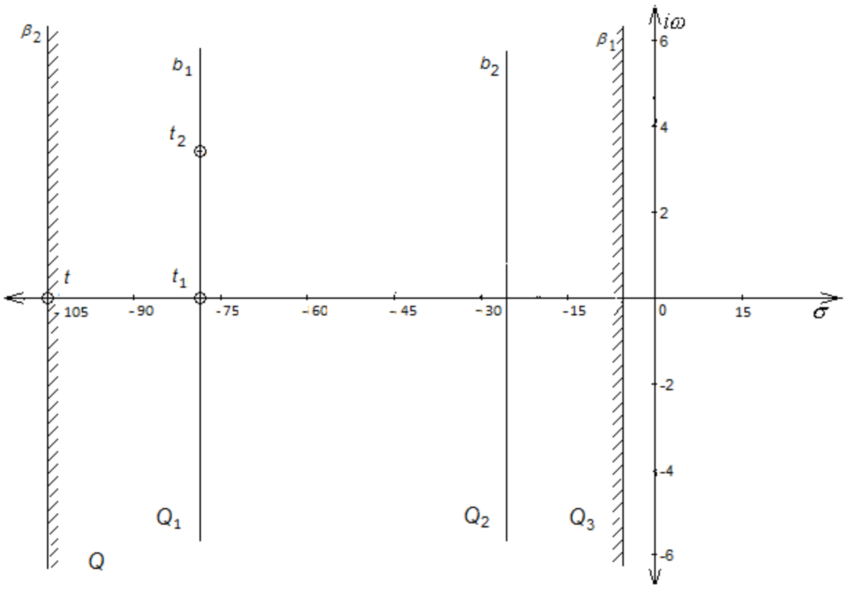


Рисунок 2 – Расположение границ β_1 и β_2 области качества Q системы

Таким образом, область качества Q, расположенная между заданными границами β_1 и β_2 локализации корней системы, оказалась разделенной на три подобласти – Q_1, Q_2 и Q_3, две первые из которых будут ограничивать размещение корней полиномов (11.2) и (11.3) расширения соответственно. Значения координат ω для границ b_1 и b_2 подобластей Q_1, Q_2 будем определять ниже, при рассмотрении соответствующих уравнений расширения (11).

2.2.1 Определение интервала изменения параметра a_2

С целью синтеза требуемого характеристического полинома рассмотрим вначале полином (11.2) расширения (11) второй степени. Подставив в (11.2) значение комплексного переменного $s = \sigma + i\omega$, запишем

$$(\sigma + i\omega)^2 + a_1(\sigma + i\omega) + a_2 = 0.$$

После преобразования получим

$$\sigma^2 + i(2\sigma\omega + a_1\omega) - \omega^2 + a_1\sigma + a_2 = 0.$$

На основании последнего выражения запишем уравнение коневого годографа (УКГ) и уравнение параметра (УП) годографа:

УКГ: $$2\sigma\omega + a_1\omega = 0, \qquad (12)$$

УП: $$\sigma^2 - \omega^2 + a_1\sigma + a_2 = 0. \qquad (13)$$

Уравнение (12) распадается на два уравнения, первое из которых представляет собой уравнение Бендрикова – Теодорчика, т.е. уравнение корневого годографа в комплексной плоскости

УКГ: $$\sigma = -\, a_1/2, \qquad (14)$$

а второе является уравнением корневого годографа на действительной оси

$$\omega = 0. \qquad (15)$$

Из (13) получим выражение для определения параметра a_2:

$$a_2 = -\,\sigma^2 + \omega^2 - a_1\,\sigma = \sigma^2 + \omega^2. \qquad (16)$$

Зададим значение параметра a_1 т.о., чтобы корневой годограф (14) располагался внутри области качества Q ближе к левой границе β_1 этой области. Примем значение $a_1 = 155 = \text{const}$, поскольку, исходя из установленных особенностей конфигурации, динамических, асимптотических свойств семейств годографов систем второго порядка [5], при любых значениях a_1, изменяющихся в пределах $9 < a_1 < 155$, семейство годографов полинома второй степени будет располагаться в пределах области Q, ограниченной параллельными линиями β_1 и β_2. Тогда уравнение корневого годографа примет вид

$$\sigma = -\,77{,}5. \qquad (17)$$

Соответствующий корневой годограф уравнения второй степени представлен на рис. 3. Направление миграции корней вдоль ветвей годографа показано стрелками. Очевидно, что комплексные ветви корневого годографа совпадают с границей b_1, для которой координата σ_{b1} пересечения с осью σ устанавливается равной

$$\sigma_{b1} = -\, a_1/2 = -\,77{,}5.$$

Определим интервал изменения параметра a_2 расположенным между точками $t_1(-77{,}5;0)$ и $t_2(-77{,}5;40)$ (рис. 2 и 3), т.е. примем

$$[\underline{a}_2, \overline{a}_2] = [a_2(t_1),\ a_2(t_2)], \tag{18}$$

и, используя выражение (16), вычислим значения a_2 в отмеченных точках.

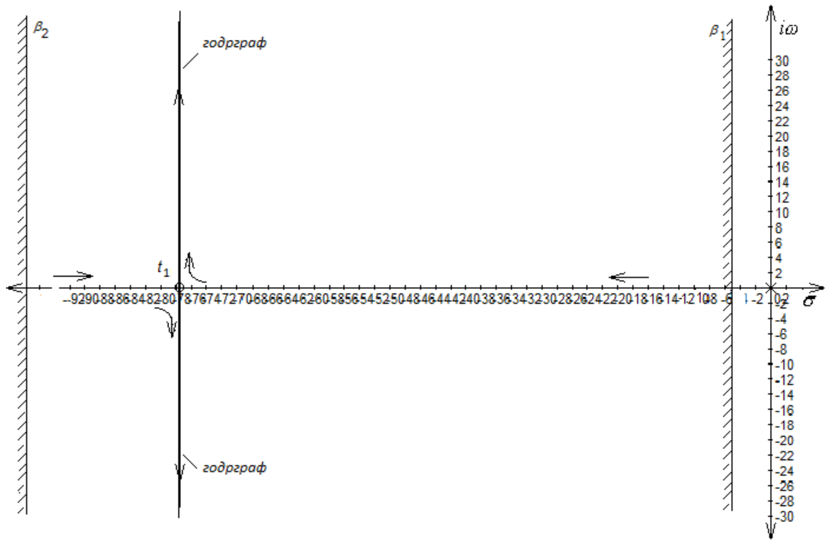


Рисунок 3 – Корневой годограф Теодорчика – Эванса полинома (11.2) расширения при значении $a_1 = 155$

$a_2(t_1) = \underline{a}_2 = (-77{,}5)^2 + 0 = 6006{,}25;$

$a_2(t_2) = \overline{a}_2 = (-77{,}5)^2 + 40^2 = 7606{,}25.$

Следовательно, полученный на основании (11.2) интервал изменения параметра a_2 годографа равен

$$[\underline{a}_2, \overline{a}_2] = [6006{,}25,\ 7606{,}25]. \tag{19}$$

2.2.2 Определение интервала изменения параметра a_3

Для определения a_3 рассмотрим полином (11.3) третьей степени расширения (11). Подставив в (11.3) значение комплексного переменного $s = \sigma + i\omega$ и выполнив соответствующие преобразования аналогично выполненным в предыдущем разделе, запишем соответственно уравнение корневого годографа и уравнение параметра годографа полинома (11.3):

УКГ: $$3\sigma^2 \omega - \omega^3 + 2a_1\sigma\omega + a_2\omega = \mathrm{v}(\sigma,\omega) = 0, \tag{20}$$

УП: $$\sigma^3 - 3\sigma\omega^2 + a_1\sigma^2 - a_1\omega^2 + a_2\sigma = u(\sigma,\omega) = -a_3. \tag{21}$$

Уравнение (20) распадается на два уравнения, первое из которых представляет собой уравнение Бендрикова – Теодорчика, т.е. уравнение корневого годографа в комплексной плоскости

УКГ: $$3\sigma^2 - \omega^2 + 2a_1\sigma + a_2 = 0, \tag{22}$$

а второе является уравнением корневого годографа на действительной оси

$$\omega = 0. \tag{23}$$

Из (21) получим выражение для определения параметра a_3 (формулу параметра):

$$a_3 = -\sigma^3 + 3\sigma\omega^2 - a_1\sigma^2 + a_1\omega^2 - a_2\sigma. \quad (24)$$

Определим границу области качества Q_2 (линию b_2) для семейства полиномов третьей степени уравнением

$$\sigma_{b2} = -25. \quad (25)$$

Очевидно, что искомые граничные значения интервала вариации параметра a_3 будут определяться характером пересечения границы (25) семейством годографов (11.3) и значениями этого параметра в точках пересечения b_2 ветвями этого семейства. Поэтому получим выражения для определения a_3 и исследуем характер пересечения b_2 ветвями семейства.

Значения a_3 определяются по формуле (24). Предварительно в нее следует подставить значение σ согласно выражению (25) и соответствующие значения координат ω точек пересечения ветвями годографов границы b_2, которые определяются по формуле

$$\omega = \pm\sqrt{3\sigma^2 + 2a_1\sigma + a_2}, \quad (26)$$

полученной на основании (22).

Ввиду того, что функция параметра $a_3(\omega)$ (24) является непрерывной дифференцируемой функцией и, следовательно, на границе b_2 в общем случае будет иметь место чередование участков возрастания и убывания этой функции, для определения границ интервала a_3 определим вначале минимальное и максимальное значения координат ω в области пересечения семейством годографов (11.3) границы b_2, а именно координаты $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$, исходя из выражения (26). Запишем соответствующие формулы:

$$\omega_{\min} = \pm\sqrt{3\sigma^2 + 2a_1\sigma + \underline{a}_2}, \quad (27)$$

$$\omega_{\max} = \pm\sqrt{3\sigma^2 + 2a_1\sigma + \overline{a}_2}. \quad (28)$$

$$\omega_{\min} = \pm\sqrt{3\cdot(-25)^2 + 2\cdot 155\cdot(-25) + 6006{,}25} = 9{,}014,$$

$$\omega_{\max} = \pm\sqrt{3\cdot(-25)^2 + 2\cdot 155\cdot(-25) + 7606{,}25} = 41{,}6.$$

Полученные значения $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$ соответствуют точкам t_3 и t_4 на рис. 4, которые ограничивают область пересечений (отрезок t_3t_4) границы b_2 семейством ветвей корневого портрета полинома (11.3).

На основании значений $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$ вычислим значения $a_{3\min}$ и $a_{3\max}$ параметра a_3 соответственно в точках t_3 и t_4 по следующим формулам:

$$a_{3\min} = -\sigma^3 + 3\sigma\omega_{\min}^2 - a_1\sigma^2 + a_1\omega_{\min}^2 - \underline{a}_2\sigma, \quad (29)$$

$$a_{3\max} = -\sigma^3 + 3\sigma\omega_{\max}^2 - a_1\sigma^2 + a_1\omega_{\max}^2 - \overline{a}_2\sigma. \quad (30)$$

$a_{3\min} = -(-25)^3 + 3(-25)(9{,}014)^2 - 155(-25)^2 + 155(9{,}014)^2 - 6006{,}25(-25) = 75406{,}1;$

$a_{3\max} = -(-25)^3 + 3(-25)(41{,}6)^2 - 155(-25)^2 + 155(41{,}6)^2 - 7606{,}25(-25) = 247351{,}1.$

Соответствующий корневой портрет, иллюстрирующий полученные результаты, показан на рис. 4. Портрет представлен полем корневых траекторий, которое иллюстрируется тремя линиями уровня. Ограничивающие поле линии пересекают границу b_2 в точках t_3 и t_4. Область пересечений корневого портрета с границей b_2 представляет собой отрезок t_3t_4 на этой границе (показан утолщенной линией на рис. 4.

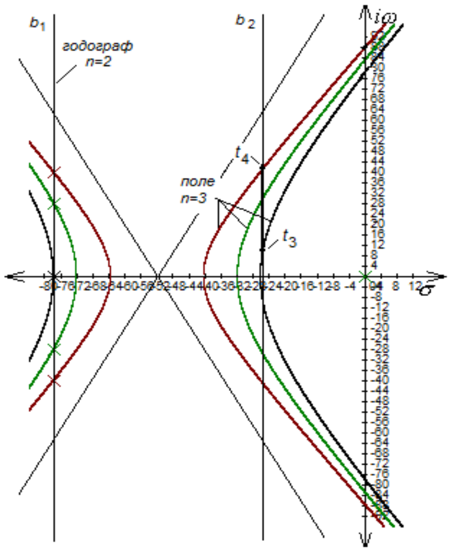


Рисунок 4 – Поле корневых траекторий полинома (11.3) расширения

В соответствии с отмеченным выше, значения параметра a_3 в области пересечений непрерывно возрастают от точки t_3 к точке t_4. Поэтому в качестве верхней границы изменения a_3 примем минимальное значение a_3 в области пересечений (в точке t_3), т.е.

$$\overline{a}_3 = a_{3\min} = 75406{,}1. \tag{31}$$

Очевидно, что значения параметра a_3 в точках пересечения действительными положительными ветвями годографов поля границы β_2 имеют тенденцию изменения аналогичную изменению параметра на границе b_2, т.е. монотонно возрастают с возрастанием a_2. Проверка значения $a_3 = a'_{3\beta}$ в точке пересечения границы β_2 действительной положительной (устремленной в левую полуплоскость) ветвью годографа поля, построенного при значении $a_2 = \underline{a}_2$, показала, что это значение превышает $a_{3\min}$, т.е. $a_{3\min} < a'_{3\beta}$. Поэтому выражение (31) является справедливым.

Определим теперь нижнюю границу $\underline{a}_3$ интервала изменения параметра a_3. Для этого на основании (22) получим выражение для определения координат точек пересечения годографами портрета действительной оси σ:

$$\sigma_r = -\frac{1}{3}a_1 \pm \sqrt{\frac{1}{9}a_1^2 - \frac{1}{3}a_2}. \tag{32}$$

Значения параметра в этих точках будем вычислять по формуле

$$a_{3r} = -\sigma_r^3 - a_1\sigma_r^2 - a_2\sigma_r. \tag{33}$$

На основании формул (32) и (33) подсчитаем значение a_3 в точках σ_{r1}' и σ_{r1}'' пересечения оси σ годографом, ограничивающим поле корневых траекторий снизу и проходящим через точку t_3 (рис. 4).

$$\sigma_{r1}' = -\frac{1}{3}155 + \sqrt{\frac{1}{9}155^2 - \frac{1}{3}6006{,}25} = -25{,}81,$$

$$\sigma_{r1}'' = -\frac{1}{3}155 - \sqrt{\frac{1}{9}155^2 - \frac{1}{3}6006{,}25} = -77{,}5;$$

$a_{3r}' = (-\sigma_{r1}')^3 - a_1(-\sigma_{r1}')^2 - a_2\,\sigma_{r1}' = (25,81)^3 - 155\,(25,81)^2 + 6006,25\,(25,81) =$
$= 17193,5 - 103254,2 + 155021,3 = -86060,7 + 155021,3 = 68960,6,$
$a_{3r}'' = (-\sigma_{r1}'')^3 - a_1(-\sigma_{r1}'')^2 - a_2\,\sigma_{r1}'' = (77,5)^3 - 155\,(77,5)^2 + 6006,25\,(77,5) =$
$= 465484,375 - 930968,75 + 465484,375 = 0.$

На основании приведенного выше определим минимальную границу интервала изменения параметра a_3 в точке с координатой σ_{r1}' равной

$$\underline{a}_3 = a_{3_r}' = 68960{,}6, \tag{34}$$

поскольку, как показала проверка, значение $a_3 = a_{3\beta}'$ в точке пересечения границы β_2 действительной положительной ветвью годографа, устремленной в левую полуплоскость, превышает значение a_3 в точке σ_{r1}', т.е. $a_{3r}' < a_{3\beta}'$. Следовательно

$$a_3 \in [\underline{a}_3, \overline{a}_3] = [68960{,}6,\ 75406{,}1]. \tag{35}$$

2.2.3 Определение интервала изменения параметра a_4

Для определения a_4 рассмотрим полином (11.4) четвертой степени расширения (11). Подставив в (11.4) значение комплексного переменного $s = \sigma + i\omega$ и сделав соответствующие преобразования аналогично выполненным в предыдущих разделах, запишем соответственно уравнение корневого годографа и уравнение параметра годографа полинома (11.4):

УКГ: $$4\sigma^3\omega - 4\sigma\omega^3 + 3a_1\sigma^2\omega - a_1\omega^3 + 2a_2\sigma\omega + a_3\omega = v(\sigma,\omega) = 0\,, \tag{36}$$

УП: $$\sigma^4 - 6\sigma^2\omega^2 + \omega^4 + a_1\sigma^3 - 3a_1\sigma\omega^2 + a_2\sigma^2 - a_2\omega^2 + a_3\sigma = u(\sigma,\omega) = -a_4\,. \tag{37}$$

Уравнение (36) распадается на два уравнения, первое из которых представляет собой уравнение Бендрикова – Теодорчика, т.е. уравнение корневого годографа в комплексной плоскости

УКГ: $$4\sigma^3 - 4\sigma\omega^2 + 3a_1\sigma^2 - a_1\omega^2 + 2a_2\sigma + a_3 = 0, \tag{38}$$

а второе является уравнением корневого годографа на действительной оси

$$\omega = 0. \tag{39}$$

Из (37) получим выражение для определения параметра a_3 (формулу параметра):

$$a_4 = -\sigma^4 + 6\sigma^2\omega^2 - \omega^4 - a_1\sigma^3 + 3a_1\sigma\omega^2 - a_2\sigma^2 + a_2\omega^2 - a_3\sigma. \tag{40}$$

Граница области качества Q (линия β_1 на рис. 2) для семейства полиномов четвертой степени определена выражением (10).

Очевидно, что искомые граничные значения интервала вариации параметра a_4 будут определяться характером пересечения границы β_1 семейством годографов (11.4) и значениями этого параметра в точках пересечения β_1 ветвями этого семейства. Поэтому получим выражения для определения a_4 и исследуем характер пересечения β_1 ветвями семейства.

Значения a_4 определяются по формуле (40). Предварительно в нее следует подставить значение σ согласно выражению (10) и соответствующие значения координат ω точек пересечения ветвями годографов границы β_1, которые определяются по формуле

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{4\sigma^3 + 3a_1\sigma^2 + 2a_2\sigma + a_3}{4\sigma - a_1}}, \tag{41}$$

полученной на основании (38).

Используем также уравнение корневого годографа в форме

$$4\sigma^3 + 3a_1\sigma^2 + 2a_2\sigma + a_3 = 0 \tag{42}$$

и уравнение параметра в форме

$$\sigma^4 + a_1\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_3\sigma = -a_4 \tag{43}$$

для установления характера пересечения ветвями корневого годографа действительной оси σ.

Ввиду того, что функция параметра $a_4(\sigma,\omega)$ (40) является непрерывной дифференцируемой функцией и, следовательно, на границе β_1 в общем случае будет иметь место чередование участков возрастания и убывания этой функции, для определения границ интервала a_4 определим вначале минимальное и максимальное значения координат ω в области пересечения семейством годографов (11.4) границы β_1 а именно координаты $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$, исходя из выражения (41). Запишем соответствующие формулы:

$$\omega_{\min} = \pm\sqrt{\frac{4\sigma^3 + 3a_1\sigma^2 + 2\overline{a}_2\sigma + \underline{a}_3}{4\sigma + a_1}}, \tag{44}$$

$$\omega_{\max} = \pm\sqrt{\frac{4\sigma^3 + 3a_1\sigma^2 + 2\underline{a}_2\sigma + \overline{a}_3}{4\sigma + a_1}}. \tag{45}$$

$$\omega_{\min} = \pm\sqrt{\frac{4\cdot(-4{,}5)^3 + 3\cdot 155\cdot(-4{,}5)^2 + 2\cdot 7606{,}25\cdot(-4{,}5) + 68960{,}6}{4\cdot(-4{,}5) + 155}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{9556{,}1}{137}} = \pm 8{,}35;$$

$$\omega_{\max} = \pm\sqrt{\frac{4\cdot(-4{,}5)^3 + 3\cdot 155\cdot(-4{,}5)^2 + 2\cdot 6006{,}25\cdot(-4{,}5) + 75406{,}1}{4\cdot(-4{,}5) + 155}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{30401{,}6}{137}} = \pm 14{,}9.$$

Полученные значения $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$ соответствуют точкам t_5 и t_6 на рис. 5, которые ограничивают область пересечений (отрезок t_5t_6) границы β_1 семейством ветвей корневого портрета полинома (11.4).

На основании полученных выше значений $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$ вычислим значения a_4' и a_4'' параметра a_4 соответственно в точках t_5 и t_6 по следующим формулам:

$$a_4' = -\sigma^4 + 6\sigma^2\omega_{\min}^2 - \omega_{\min}^4 - a_1\sigma^3 + 3a_1\sigma\omega_{\min}^2 - \overline{a}_2\sigma^2 + \overline{a}_2\omega_{\min}^2 - \underline{a}_3\sigma; \tag{46}$$

$$a_4'' = -\sigma^4 + 6\sigma^2\omega_{\max}^2 - \omega_{\max}^4 - a_1\sigma^3 + 3a_1\sigma\omega_{\max}^2 - \underline{a}_2\sigma^2 + \underline{a}_2\omega_{\max}^2 - \overline{a}_3\sigma. \tag{47}$$

Тогда

$a_4'(t_5) = -(-4{,}5)^4 + 6(-4{,}5)^2(8{,}35)^2 - (8{,}35)^4 - 155(-4{,}5)^3 + 3\cdot 155\cdot(-4{,}5)(8{,}35)^2 - 7606{,}25(-4{,}5)^2 + 7606{,}25(8{,}35)^2 - 68960{,}6\cdot(-4{,}5) = 558052{,}975;$

$a_4''(t_6) = -(-4{,}5)^4 + 6(-4{,}5)^2(14{,}9)^2 - (14{,}9)^4 - 155(-4{,}5)^3 + 3\cdot 155\cdot(-4{,}5)\cdot(14{,}9)^2 - 6006{,}25(-4{,}5)^2 + 6006{,}25(14{,}9)^2 - 75406{,}1\cdot(-4{,}5) = 1077992{,}615.$

Соответствующий корневой портрет, иллюстрирующий полученные результаты, показан на рис. 5. Портрет представлен полем корневых траекторий, которое иллюстрируется линиями уровня двух годографов. Ограничивающие поле линии пересекают границу β_1 в точках t_5 и t_6. На рис. 5 положительные ветви и асимптоты годографов отмечены знаком «+», отрицательные – знаком «–». Ветви первого

годографа, одна из ветвей которого пересекает границу β_1 в точке t_5, обозначены цифрой «1»; ветви второго годографа, одна из ветвей которого пересекает границу β_1 в точке t_6, обозначены цифрой «2», Область пересечений корневого портрета с границей β_1 представляет собой отрезок t_5t_6 на этой границе (показан утолщенной линией на рис. 5).

На основании математического представления функции параметра (43) как непрерывной дифференцируемой функции $a_4 = f(\omega)$ можно заключить, что на границе β_1 имеется три точки экстремума этой функции: в начале координат и две комплексно-сопряженные на границе β_1, т.е. функция от нулевого значения вначале возрастает до точек экстремума и затем начинает монотонно убывать в направлении $-\infty$.

Поэтому для определения искомых допустимых границ интервалов изменения параметра a_4 в данном случае следует вычислить значения параметра в граничных точках t_5 и t_6 области t_5t_6 пересечения ветвями корневого портрета полинома (11.4) линии равной степени устойчивости β_1, поскольку область пересечений может включать экстремум функции параметра. Затем из двух полученных значений следует выбрать меньшее [5]. Следует также учесть, что граница β_1 может пересекаться ветвями годографа только в двух комплексно-сопряженных точках (кроме начала координат, где располагается один полюс системы). Для вычисления параметра вначале определяются координаты ω точек пересечения t_5 и t_6. Эти координаты, $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$, точек пересечения t_5 и t_6 вычислены выше соответственно по формулам (44) и (45). Значения параметра a_4, a_4' и a_4'', соответственно в точках t_5 и t_6 вычислены выше соответственно по формулам (46) и (47).

Основываясь на установленных в [5] закономерностях динамики функции параметра и конфигурации интервального семейства годографов на границе устойчивости, можно отметить, что в данном случае область пересечений, отрезок t_5t_6, располагается в зоне возрастания функции параметра вдоль оси $i\omega$ в направлении от начала координат, т.е. не содержит внутри себя экстремумов этой функции, что упрощает задачу анализа (рис. 4).

Ввиду того, что семейство начальных точек портрета (11.4) полностью располагается в пределах области качества Q, т.к. семейство годографов порождающего портрета [6] размещено в этой области, а также на основании отмеченных выше и в [5] особенностей конфигурации корневого портрета системы четвертого порядка, очевидно, что ветвями корневого портрета системы, устремленными в левую полуплоскость к положительным асимптотам, пересекается также граница β_2 области качества, а именно каждый годограф семейства пересекает β_2 в трех точках: одной действительной положительной ветвью и двумя комплексно-сопряженными ветвями. Однако, как показали соответствующие вычисления, значения параметра в искомых точках пересечения значительно превышают определенные выше значения: a_4' и a_4'' и, поэтому, в дальнейшем не рассматриваются.

Основываясь на результатах [5], можно заключить, что верхняя граница $\bar{a}_4$ интервала изменения параметра определяется следующим выражением:

$$\bar{a}_4 = \min(a_4', a_4'') = 558052{,}975. \qquad (48)$$

На основании установленных в [5] и отмеченных выше свойств и закономерностей функций корневого годографа и параметра, нижнюю границу $\underline{a}_4$ интервала изменения параметра a_4 будем определять путем анализа значений параметра в точке t_7 (рис. 5) пересечения границы β_1 действительными ветвями рассматриваемых двух

годографов, ограничивающих область пересечений t_5t_6. Значение параметра a_4 в точке пересечения t_7 границы β_1 (рис. 5) действительными ветвями рассмотренных выше граничных годографов поля вычислим с использованием формулы (43).

$$a_{4r}'(t_7) = -\sigma^4 - a_1\sigma^3 - \overline{a}_2\sigma^2 - \underline{a}_3\sigma = -(-4,5)^4 - 155(-4,5)^3 - 7606,25(-4,5)^2 -$$

$$-68960,6\cdot(-4,5) = -410,06 + 14124,375 - 154026,56 + 310322,7 = 324447,075 -$$

$$-154436,62 = 170010,46;$$

$$a_{4r}''(t_7) = -\sigma^4 - a_1\sigma^3 - \underline{a}_2\sigma^2 - \overline{a}_3\sigma = -(-4,5)^4 - 155(-4,5)^3 - 6006,25(-4,5)^2 -$$

$$-75406,1\cdot(-4,5) = -410,06 + 14124,375 - 121626,56 + 339327,45 = 353451,825 -$$

$$-122036,62 = 231415,205.$$

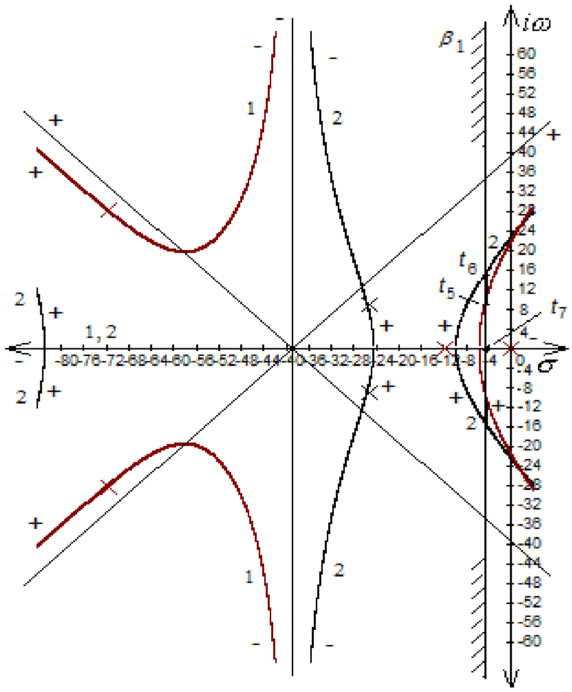


Рисунок 5 – Поле корневых траекторий полинома (11.4) расширения, представленное двумя граничными линиями уровня

Очевидно, что нижняя граница $\underline{a}_4$ интервала изменения параметра a_4 определяется следующим образом:

$$\underline{a}_4 = \max(a_{4_r}', a_{4_r}'') = 231415{,}205. \qquad (49)$$

На основании полученных границ определим интервал вариации параметра a_4:

$$a_4 \in [\underline{a}_4, \overline{a}_4] = [231416{,}205,\ 558052{,}975]. \qquad (50)$$

Ниже приведем полученные интервалы неопределенности всех коэффициентов характеристического уравнения системы:

$$a_1 = 115{,}0; \qquad (51)$$

$$a_2 \in [\underline{a}_2, \overline{a}_2] = [6006{,}25,\ 7606{,}25]; \qquad (52)$$

$$a_3 \in [\underline{a}_3, \overline{a}_3] = [68960{,}6,\ 75406{,}1]; \qquad (53)$$

$$a_4 \in [\underline{a}_4, \overline{a}_4] = [231416{,}205,\ 558052{,}975]. \qquad (54)$$

Выполненное выше исследование демонстрирует характер изменения динамики системы в ответ на параметрические вариации. Из проведенного анализа видно, что наибольшее влияние на динамику системы оказывает коэффициент при неизвестном характеристического уравнения наивысшей степени, в данном случае при s^4. Это подтверждается рисунками. Так, при увеличении a_1 ветви годографа при n=2 сдвинутся влево по причине перемещения соответствующей асимптоты и «повлекут» за собой все остальные годографы портрета, увеличивая тем самым запас устойчивости системы. Очевидно, что изменение любого другого коэффициента к подобному эффекту привести не может.

Список литературы

1. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. – 632 с.
2. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Н.Т. Кузовков. – М.: Машиностроение, 1976. – 125 с.
3. Ewans W.R. Graphical analysis of control systems / W.R. Ewans // Trans. AIEE. – 1948. – Vol. 67. – P. 547-551.
4. Римский Г.В. Автоматизация исследований динамических систем / Г.В. Римский, В.В. Таборовец. – Мн.: Наука и техника, 1978. – 336 с.
5. Несенчук А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А.А. Несенчук. – Мн. : ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.
6. Несенчук А.А. Корневой метод синтеза устойчивых полиномов путем настройки всех коэффициентов / А.А. Несенчук // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 8. – С. 13–24.
7. Barmish B.R. The robust root locus / B.R. Barmish, R. Tempo // Automatica. – 1993. – Vol. 26. – P. 183-192.
8. Анхимюк В.Л. Теория автоматического управления / В.Л. Анхимюк, О.Ф. Опейко, Н.Н. Михеев. – Мн : ДизаинПРО, 2002. – 350 с.
9. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
10. Опейко, О.Ф. Синтез регулятора тока системы векторного управления электродвигателем / О.Ф. Опейко // Вісник КДУ імені Михайла Остроградського. – 2014. – Вип. 1. – С. 9-14.
11. Кузнецов А.П. Анализ настроек канала регулирования потокосцепления ротора в системе векторного управления / А.П. Кузнецов, А.В. Марков, А.С. Шмарлевский // Доклады БГУИР. – 2008. – № 4 (34). – С. 84-91.
12. Стрижнев А.Г. Настройка цифровых регуляторов в канале регулирования потокосцепления ротора в системе векторного управления / А.Г. Стрижнев, А.В. Марков, Г.В. Ледник // Доклады БГУИР. – 2011. – № 1 (55). – С. 5-11.

References

1. Dorf, R. Modern Control Systems / R. Dorf, R. Bishop. – M.: Laboratoriya Bazovykh Znanij, 2004. – 632 p.
2. Kuzovkov, N.T. Modal Control and Observation Devices / N.T. Kuzovkov. – M.: Mashinostrojenije, 1976. – 125 p.
3. Ewans W.R. Graphical analysis of control systems / W.R. Ewans // Trans. AIEE. – 1948 . – Vol. 67. – P. 547–551.
4. Rimsky, G.V. Computer-Aided Investigation of Control Systems / G.V. Rimsky, V.V. Taborovets. – Minsk: Nauka i Tekhnika, 1978. – 336 p.
5. Nesenchuk, A.A. Analysis and Synthesis of Robust Dynamic Systems on the Basis of the Root Locus Approach / A.A. Nesenchuk. – Minsk: UIIP NAN of Belarus, 2005. – 234 p.
6. Nesenchuk, A.A. Root Locus Method for Synthesis of Stable Polynomials by Setting-Up All Coefficients / A.A. Nesenchuk // Avtomatika i Telemekhanika. – 2010. – № 8. – P. 13-24.
7. Barmish, B.R. The robust root locus / B.R. Barmish, R. Tempo // Automatica. – 1993. – Vol. 26. – P. 183-192.
8. Ankhimiuk, V.L. Control Systems Theory / V.L. Ankhimiuk, O.F. Opeiko, N.N. Mikheev. – Minsk: DesignPRO, 2002. – 350 p.
9. Polyak, B.T. Robust Stability and Control / B.T. Polyak, P.S. Scherbakov. – M.: Nauka, 2002. – 303 p.

10. Opeiko, O.F. Synthesis of Current Controller for the System of Motor Vector Control / O.F. Opeiko // Visnik KDU imeni Mikhaila Ostrograds'kogo. – 2014. – Vip. 1. – P. 9–14.
11. Kuznetsov, A.P. Analysis of Tuning the Rotor Flux Control Channel in the Rotor Flux Oriented Vector Control System / A.P. Kuznetsov, A.V. Markov, A.S. Shmarlevskij // Doklady BGUIR. – 2008. – № 4 (34). – P. 84–91.
12. Strizhnev, A.G. Tuning Digital Controllers in the Rotor Flux Control Channel of the Vector Control System / A.G. Strizhnev, A.V. Markov, G.V. Lednik // Doklady BGUIR. – 2011. – № 1 (55). – P. 5–11.

RESUME

A.A. Nesenchuk, O.F. Opeiko, D.S. Odnolko

Dynamics Simulation and Calculation of Robust Parameters for the Electric Drive Control System on the Basis of the Root Locus Portraits

The technique for calculation of parameters of the electric drive control system, operating in conditions of uncertainty, on the basis of the mathematical model in the form of the extended root locus has been considered. Simulation of the rotor flux control system dynamics in the rotor flux oriented vector control system of the induction motor has been carried out with application of the model in the form of the extended root locus. Control system parameters have been calculated in consideration of the system functioning in conditions of substantial parametric uncertainty. The results of time response simulation confirm low sensitivity of the system to parameter variations.

The methods and instruments considered can be implemented for various purpose engineering plants control systems design, electric drives in industry and transportation etc., for setting-up and upgrading control systems, that makes it possible to reduce the time period of systems development and increase operational quality.

Статья поступила в редакцию 15.04.2014.